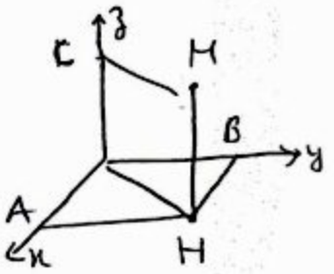
I / Systèmes de coordonnées

1/ Coordonnées cartésiennes



a/ Définition : $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ repère orthonormé direct

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

les coordonnées cartésienne de M sont (x,y,z)

On pose $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

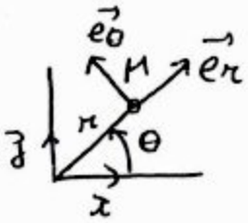
b/ Element de déplacement : $d\vec{\ell} = d\overrightarrow{OM} = dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k}$

c/ Element de surface : $dS_x = dy\,dz$; $dS_y = dx\,dz$; $dS_z = dx\,dy$

$dS_x \perp dx$ $\quad dS_y \perp dy$ $\quad dS_z \perp dz$

d/ Element de volume : $dV = dx\,dy\,dz$

2/ Coordonnées polaires : (r,θ)



a/ Définition : $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ repère orthonormé

la position de M est déterminée par r et θ ; $r = OM \geq 0$; $\theta = (\vec{\imath}, \widehat{OM})$

Relations entre les coordonnées cartésienne et polaire, $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\theta \in [0, 2\pi]$

$\overrightarrow{OH} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$

Base locale liée à M : $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$; $\overrightarrow{OH} = r\vec{e_r}$

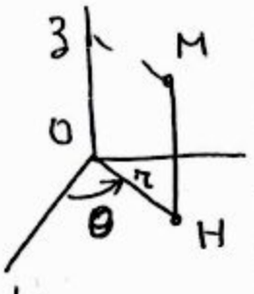
b/ Déplacement élementaire : $d\vec{\ell} = d\overrightarrow{OM} = dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath}$

$d\vec{\ell} = dr\,\vec{e_r} + r\,d\theta\,\vec{e_\theta}$

c/ Element de surface :

$dS = dx\,dy$; $dS = r\,dr\,d\theta$

3/ Coordonnées cylindriques (r,θ,z)



a/ Définition : M est repéré par (r,θ,z)

$r = OH \geq 0$; $\theta = (\vec{\imath}, \overrightarrow{OH})$; $z = \overline{HM}$

b/ Relation entre les coordonnées cartésienne et cylindriques :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \text{Arctan}\,\frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

c/ Base locale liée à M : $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$; $\overrightarrow{OM} = r\vec{e_r} + z\cdot\vec{e_z}$

d/ Déplacement élementaire : $d\vec{\ell} = d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{e_r} + r\,d\theta\,\vec{e_\theta} + dz\,\vec{e_z}$

ETUDUP .com

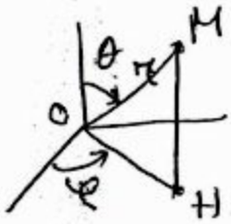
e/ Elements de surface:

$dS_r = r\,d\theta\,dz$ (r=cst) $\quad dS_\theta = dr\,dz$ (θ=cst) ; $dS_\varphi = r\,dr\,d\theta$.

$dS_r \perp \vec{e_r}$ $\quad dS_\theta \perp \vec{e_\theta}$ $\quad dS_z \perp \vec{e_z}$;

4/ Coordonnées sphériques (r, θ, φ)

a/ Définition: M est repéré par (r, θ, φ) avec:



$r = OH$, $r \geq 0$; $\varphi = (\vec{i}, \widehat{\vec{OH}})$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$\theta = (\vec{k}, \widehat{\vec{OH}})$; $0 \leq \theta \leq \pi$

b/ Relation entre les coordonnées cartésienne et sphériques

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) \\ \varphi = \text{Arctan}\,\frac{y}{x} \end{cases}$$

c/ Base locale liée à M : $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$: $\vec{OH} = r\vec{e_r}$

d/ Déplacement élémentaire : $\vec{dl} = d\vec{OH} = dr\,\vec{e_r} + r\sin\theta\,d\varphi\,\vec{e_\varphi} + r\,d\theta\,\vec{e_\theta}$

f/ Element de volume : $dV = r^2\sin\theta \cdot dr\,d\theta\,d\varphi$

II/ Integrales multiples (voir annexe 1)

III/ Analyse vectorielle

1/ Champ scalaire et vectoriel

a/ Définition: Un champ est une application $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$

On appelle champ scalaire (vectoriel), un champ qui à tout point de l'espace associe un réel (un vecteur)

b/ Exemples : un champ scalaire : température en chaque point de la classe

Un champ vectoriel : Dans une rivière qui s'écoule, on peut attribuer en chaque point une vitesse

Dans la pratique : On travaille dans l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^3$

2/ Gradient : a/ Définition: Soit un champ scalaire f

Le gradient de f noté $\overrightarrow{grad}\,f$ indique la direction vers laquelle f est croissant, c'est un vecteur qui généralise la notion de dérivée

$$\overrightarrow{grad}\,f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

ETUDUP .com

Propriétés : $\overrightarrow{grad}(\alpha f + \beta g) = \alpha \overrightarrow{grad} f + \beta \overrightarrow{grad} g$

Si $\overrightarrow{grad} f$ dépend du temps alors $\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{grad} f) = \overrightarrow{grad}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)$

Théorème du gradient : Soit f un champ scalaire, A et B 2 points de l'espace ; (C) une courbe reliant A et B alors

$$\int_C \overrightarrow{grad} f \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A)$$

Définition : On dit qu'un champ vectoriel $\vec{E}$ dérive d'un potentiel si il existe une fonction scalaire f tel que : $\vec{E} = \overrightarrow{grad} f$

3/ Divergence : L'opérateur divergence est un outil qui mesure si un champ vectoriel « rentre » ou « sort » d'une zone de l'espace il donne une information très liée aux sources qui créent le champ.

a/ Définition : Soit $\vec{f}$ un champ vectoriel

$$\text{div}\,\vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

b/ Propriétés : $\text{div}(\alpha \vec{f} + \beta \vec{g}) = \alpha\,\text{div}\,\vec{f} + \beta\,\text{div}\,\vec{g}$

f scalaire $\quad \text{div}(f\vec{g}) = \overrightarrow{grad} f \cdot \vec{g} + f \cdot \text{div}\,\vec{g}$

$\vec{f}$ vectoriel $\quad \frac{\partial}{\partial t}(\text{div}\,\vec{f}) = \text{div}\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{f}\right)$

c/ Théorème de la divergence : Soit $\vec{f}$ un champ vectoriel V un volume, délimité par sa surface fermée S alors

$$\iiint_V (\text{div}\,\vec{f})\, dV = \iint_S \vec{f} \cdot d\vec{S}$$

4/ Rotationnel

a/ Définition : Soit $\vec{f}$ un champ vectoriel ; $\vec{f}(f_x, f_y, f_z)$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

b/ Interprétation : $\overrightarrow{rot}\,\vec{f}$ permet de mesurer la rotation du champ vectoriel $\vec{f}$. La direction d'un vecteur de ce champ donne l'axe de rotation. Son intensité donne la vitesse de rotation autour de cet axe

c/ Propriété : $\overrightarrow{rot}(\alpha \vec{f} + \beta \vec{g}) = \alpha\,\overrightarrow{rot}\,\vec{f} + \beta\,\overrightarrow{rot}\,\vec{g}$

ETUDUP .com

d/ Theoreme du rotationnel

(S) surface delimitée par le contour fermé (C)

alors $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{e} = \iint_S \vec{rot}\, \vec{f} \cdot d\vec{S}$

5/ Laplacien : f champ scalaire

L'operateur Laplacien Δ est l'application qui à f associe la divergence du gradient de f ; Ainsi $\Delta f = div(grad f)$

Remarque : On definit aussi l'operateur laplacien vectoriel

$$\Delta \vec{f} = (\Delta f_x, \Delta f_y, \Delta f_z)$$

6/ Operateur nabla : $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

utilité : regrouper les formules precedentes

Soit $\vec{f}$ un champ vectoriel et g un champ scalaire

$grad\, g = \nabla . g$; $div\, \vec{f} = \vec{\nabla} . \vec{f}$; $rot\, \vec{f} = \vec{\nabla} \wedge \vec{f}$

$\Delta g = div(grad\, g) = \nabla(\nabla g) = \nabla^2 g$

8/ Theoremes d'analyse vectoriel

a/ Composition d'operateur vectoriel

$div(rot) = 0$, $rot(rot) = grad(div) - \Delta$

$rot(grad) = 0$

b/ Theoreme d'existence

Soit f un champ vectoriel.

si $rot\, \vec{f} = \vec{0}$ alors il existe un champ scalaire g tel que $f = grad\, g$

9/ Formules d'Analyse vectorielle (voir annexe 2)

ETUDUP .com

et encore plus..